Всесибирская открытая олимпиада школьников
2025-2026 г.г. по математике
Заключительный этап. 7 класс
Решения

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

7.1. У Антона дома живут четыре кота: Борис, Виталий, Геннадий и Дмитрий. Известно, что Виталий весит больше Бориса и Геннадия вместе взятых. Кроме того, Виталий с Борисом вместе весят столько же, сколько Геннадий и Дмитрий вдвоём, но Дмитрий с Борисом вместе весят больше Виталия и Геннадия вместе взятых. Кто из котов самый тяжёлый?

Ответ: Дмитрий.

Решение. Будем обозначать котов первыми буквами их имён. Из первого условия видно, что В весит и больше Б, и больше Г. Второе и третье взвешивания записываются как $В + Б = Г + Д$ и $Д + Б > Г + В$. Это значит, что после обмена В и Д местами стала перевешивать группа с Д, откуда следует, что Д тяжелее В. Значит, Д самый тяжёлый.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Только ответ с примерами весов, как описанная ситуация возможна — 1 балл.
Замечено что самым тяжёлым является Виталий или Дмитрий — 2 балла. Этот балл не складывается с предыдущим.

7.2. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 90 включительно (каждое по разу). Петя хочет стереть несколько из них так, чтобы сумма любых двух оставшихся была составным числом. Какое наименьшее количество чисел понадобится стереть Пете?

Ответ: 45 чисел.

Решение. Достаточно стереть все нечётные числа. Тогда сумма любых двух оставшихся чисел тоже будет чётной (и больше двух), то есть будет составной.

Покажем теперь, что меньше 45 чисел стереть не выйдет. Разобьём числа на следующие пары: $(1, 88)$, $(2, 87)$, $\ldots$, $(44, 45)$ и $(89, 90)$. Числа 89 и 179 являются простыми, поэтому из каждой пары должно быть стёрто хотя бы одно число. Всего пар 45, поэтому и стёртых чисел не менее 45 штук.

Заметим, что просто разбить числа на пары $(1, 90), \ldots, (45, 46)$ нельзя, так как $91 = 7 \cdot 13$ — составное число, и такие рассуждения не проходят.

Критерии. Только пример на 45 стёртых чисел — 2 балла.
Только доказательство того, что меньше 45 чисел стереть нельзя — 5 баллов.
Числа разбиты на пары с суммой 91 или другим составным числом — 2 балла за оценку.
За отсутствие проверки простоты чисел баллы не снимаются.

7.3. Круговая дорожка состоит из 2025 клеток, пронумерованных в произвольном порядке числами от 1 до 2025. В одну из клеток дорожки ставят робота, который действует по следующему алгоритму. Робот считывает число из клетки, в которой он находится, после чего взлетает и смещается по часовой стрелке ровно на то количество клеток, которое он прочитал. Затем робот садится в ту клетку, над которой он оказался (например, из клетки с единицей робот переместится в соседнюю), а процесс повторяется. Докажите, что в какой-то клетке робот так никогда и не побывает.

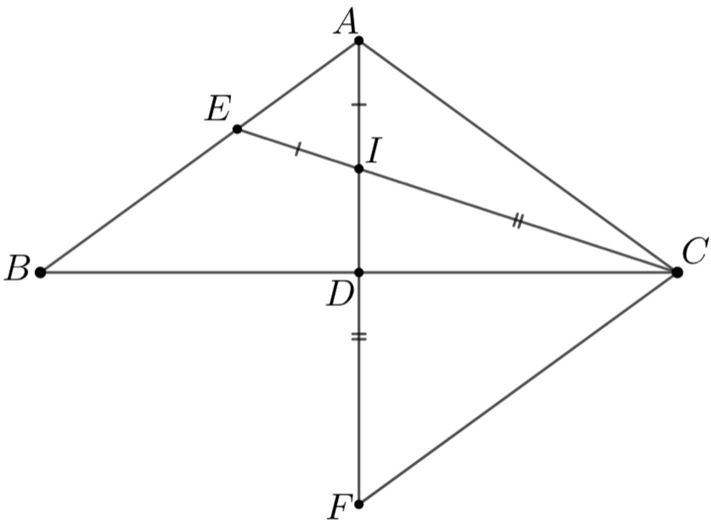
Решение: Предположим, это не так, и робот побывает в каждой клетке хотя бы один раз. Заметим, что в клетке 2025 робот тогда должен оказаться в последнюю очередь, ведь после попадания в эту клетку он всегда будет оставаться в ней. Рассмотрим первый момент, когда робот оказался в клетке 2025.

Из всех остальных клеток робот сходил ровно по разу (если бы он оказался в какой-то клетке дважды, он бы зациклился, и никогда бы не попал в 2025), то есть суммарно он сдвинулся по часовой стрелке на $1 + 2 + \ldots + 2024 = 2025 \cdot 1012$ клеток. Но это 1012 полных кругов, поэтому если бы робот начал в клетке x, то после 2024 первых ходов он бы в ней и оказался. Это противоречит тому, что он попал в клетку 2025, поэтому описанная ситуация невозможна.

Критерии. Замечено, что 2025 должна быть последней клеткой — 1 балл.
Замечено, что в каждой клетке до 2025 робот должен побывать ровно единожды — 2 балла.

7.4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) биссектрисы AD

и CE пересекаются в точке I. Оказалось, что $\angle AIC = 108°$. Найдите отношение длин отрезков CE и AD.



Ответ: $CE : AD = 2 : 1$.

Решение. Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Тогда из суммы углов треугольника AIC имеем

$$\alpha + \gamma + \angle AIC = 180°,$$

откуда $\beta = 90° - \alpha - \gamma = 90° - 72° = 18°$. Значит, треугольник ABC имеет углы $\angle B = \angle C = 36°$ и $\angle A = 108°$.

Рассмотрим треугольник AIE. В нём $\angle EAI = \frac{1}{2}\angle EAC = 54°$, $\angle AIE = 180° - \angle AIC = 72°$, откуда $\angle AEI = 180° - 54° - 72° = 54°$. Значит, треугольник AIE равнобедренный, и $AI = EI$.

Отметим на продолжении AD за точку D такую точку F, что $AD = DF$. Заметим, что $AD = DF$, DC — общая, а $\angle ADC = \angle CDF = 90°$ (так как AD — биссектриса и высота в равнобедренном треугольнике), откуда $\triangle ADC = \triangle FDC$. Следовательно, $\angle DCF = \angle DCA = 36°$. Но тогда в треугольнике CIF имеем $\angle CIF = 72°$ и

$$\angle ICF = \angle ICD + \angle DCF = 18° + 36° = 54°,$$

то есть $\angle IFC = 54°$, и треугольник ICF равнобедренный, а $CI = IF$. Итого,

$$CE = CI + IE = FI + IA = FA = 2AD.$$

Критерии. Найдены углы ABC — 1 балл.
Показано, что AEI равнобедренный — 1 балл.
Отмечена точка F — 2 балла.
Баллы за предыдущие критерии складываются.

7.5. Чип и Дейл играют в игру. В начале игры по кругу лежат 100 мешков, в которых суммарно находится 780 орехов (в каждом мешке есть хотя бы один орех). Игроки ходят по очереди, начинает Чип. Каждым своим ходом Чип забирает все орехи из любых 9 последовательных непустых мешков (сами мешки остаются лежать на своих местах). Дейл же каждым своим ходом забирает все орехи из любого одного непустого мешка, у которого рядом уже есть пустой сосед. Если кто-то из игроков не может сделать ход, то игра завершается. Докажите, что Чип может забрать хотя бы 700 орехов вне зависимости от действий Дейла.

Решение. Пронумеруем мешки по кругу числами от 1 до 100 и разделим их на 10 групп. В первой группе будут мешки с номерами 1, 11, …, 91, во второй — 2, 12, …, 92, и т.д., в 10-й группе — 10, 20, …, 100. По крайней мере в одной из этих десяти групп суммарно не более 78 орехов, ведь в противном случае общее число орехов составляет хотя бы $79 \cdot 10 = 790$. Без ограничения общности будем считать, что в десятой группе суммарно не более 78 орехов.

Пусть Чип на первом своём ходу возьмёт орехи из мешков с номерами от 1 до 9, а затем всегда берёт орехи из мешков, следующих за тем, откуда орехи взял Дейл. Несложно видеть, что тогда пустые мешки всегда образуют непрерывный ряд, а Дейл берёт орехи только из мешков десятой группы. В итоге все орехи окажутся разобранными, Дейлу достанется максимум 78 орехов, а Чип тогда получит по крайней мере $780 - 78 = 702 > 700$, что и требовалось.

Критерии. Доказано, что в одной из указанных групп не более 80 орехов — 3 балла.